Anmerkungen zum Zwillingsparadoxon

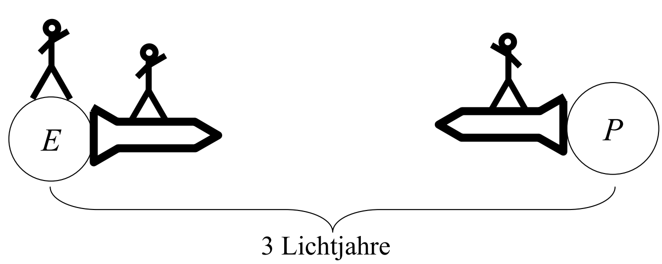
Dr. Holger Hauptmann
Europa-Gymnasium Wörth

Situation:

Zwilling A bleibt auf der Erde E.

Zwilling B reist mit $v = 0{,}6 \cdot c$ zu einem 3 Lichtjahre von der Erde entfernten Planeten P…

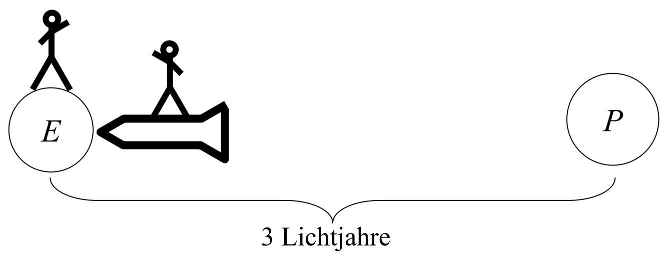
…und genauso schnell zurück.



Beobachtung:

Bei Rückkehr des Raumschiffs:

- sind für Zwilling *A* auf der Erde 10 Jahre vergangen,
- aber für Zwilling *B* im Raumschiff nur 8 Jahre.



Das Paradoxon:

Die Relativbewegung des jeweils anderen Zwillings ist während der Reise für beide Zwillinge identisch. (Der andere entfernt sich und kommt zurück.)

Die Bewegung erscheint relativ zueinander vollständig symmetrisch.

Nach dem Relativitätsprinzip sollte sich das Ergebnis der Reise für die Zwillinge nicht unterscheiden.

Tatsächlich beobachtet *A*, dass *B* zwei Jahre jünger ist als er, und *B*, dass *A* zwei Jahre älter ist.

Fragen:

Wo liegt der Unterschied zwischen den Zwillingen?

Ist die Beschleunigung in der Umkehrphase, der nur *B* ausgesetzt ist, für die Unsymmetrie und damit den Altersunterschied verantwortlich?

Handelt es sich also um ein Phänomen, das nur mit der allgemeinen Relativitätstheorie zu erklären ist?

Tatsächlich tritt der Unterschied in der Reisedauer aber auch auf, wenn keine Beschleunigungen vorkommen.

Etwa wenn das Raumschiff nicht umkehrt, sondern nur die Uhr mit einem entgegenkommenden Raumschiff synchronisiert.

Analyse aus Sicht der Zwillinge:

Zwilling *A* auf der Erde

$$s = 3\ \text{LJ}$$

$\Rightarrow$ je Weg: $\Delta t = s\,/\,v = 5\ \text{a}$

Im bewegten Bezugssystem (Raumschiff) Zeitdilatation:

$\Rightarrow$ je Weg: $\Delta t' = \Delta t\,/\,\gamma = 4\ \text{a}$

✓

Zwilling *B* im Raumschiff

Entfernung verkürzt:

$$s' = s\,/\,\gamma = 2{,}4\ \text{LJ}$$

$\Rightarrow$ je Weg: $\Delta t' = 4\ \text{a}$

Im bewegten Bezugssystem (Erde) Zeitdilatation:

$\Rightarrow$ je Weg: $\Delta t = \Delta t'/\,\gamma = 3{,}2\ \text{a}$

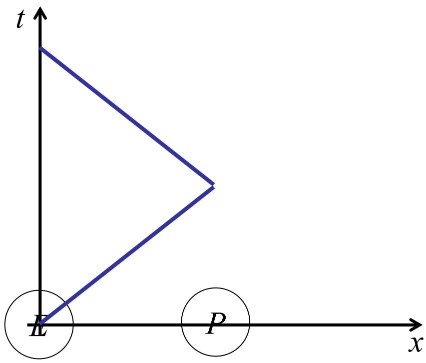
?

$$v = 0{,}6 \cdot c \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \frac{1}{\gamma} = 0{,}8$$

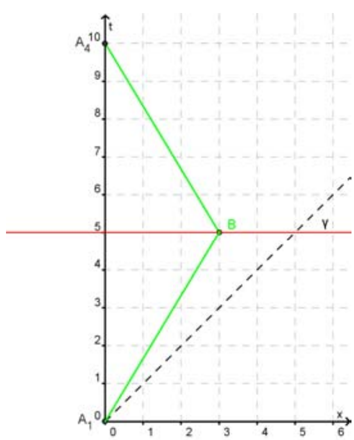
Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:

Raum-Zeit-Diagramm bzw. Minkowski-Diagramm:

- waagerechte Achse: Ort in Lichtjahren
- senkrechte Achse: Zeit (bzw. $c \cdot t$) in Jahren



Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:

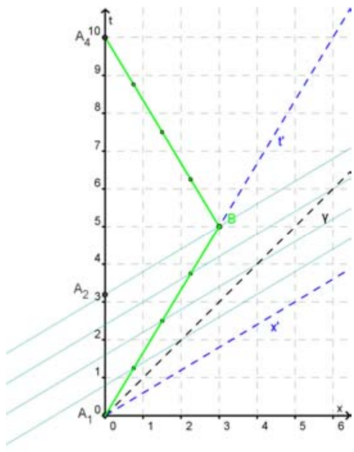


lichtschnelle Teilchen:
- auf Diagonale

gleichzeitige Ereignisse:
- auf Parallelen zur *x*-Achse
  (bei Berücksichtigung der
  Lichtlaufzeit)

gleicher Ort im Laufe der Zeit:
- auf Parallelen zur *t*-Achse

Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:

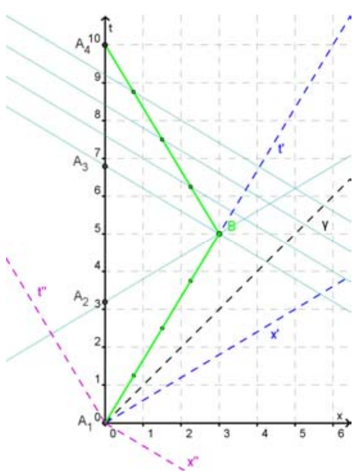


Zeitverlauf im Raumschiff:
- nur 8 Jahre Flugdauer

Bezugssystem Raumschiff:
- x'-Achse und t'-Achse

Relativität der Gleichzeitigkeit:
- gleichzeitige Ereignisse auf der Erde aus Sicht des Raumschiffs

Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:

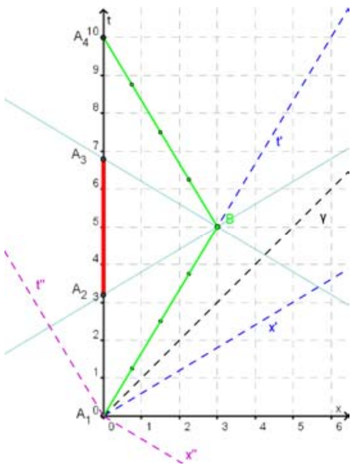


Aus Raumschiff-Sicht:
- Erduhr langsamer (bei Ankunft 3,2 a vergangen)

Bezugssystem Rückreise:
- x''-Achse und t''-Achse

Relativität der Gleichzeitigkeit:
- gleichzeitige Ereignisse auf der Erde aus Sicht des Raumschiffs bei Rückreise

Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:

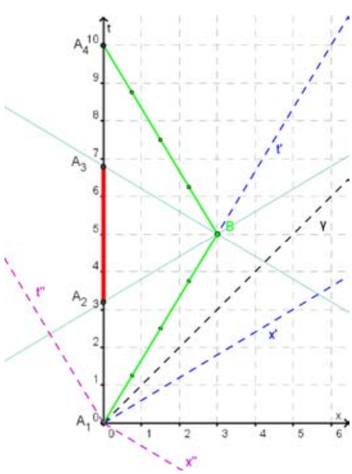


Beim Planeten finden aus Sicht des hin- und des zurückfliegenden Raumschiffs unterschiedliche Ereignisse (A2 und A3) gleichzeitig auf der Erde statt.

Aus Raumschiffsicht vergehen auf der Erde je Flug 3,2 a.

Die 3,6 a dazwischen sind nicht beobachtbar (bzw. gehen beim Umkehren rasend schnell vorbei).

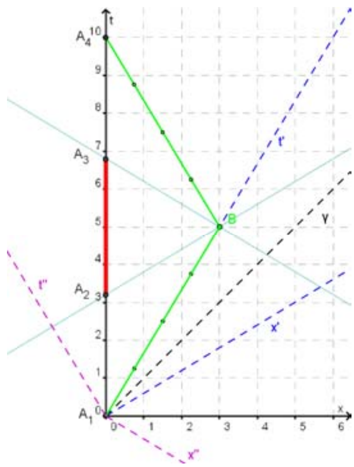
Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:



Erinnerung: Man braucht keine Umkehr, sondern kann auch mit 2 Raumschiffen argumentieren.

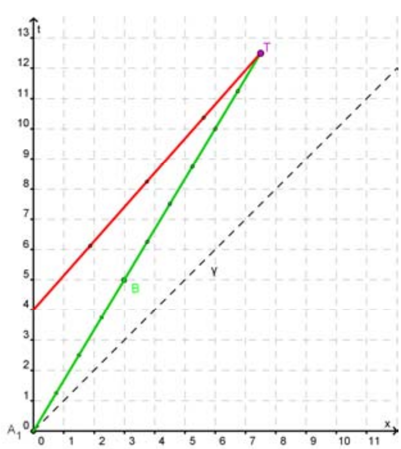
Fazit:
Das Paradoxon erklärt sich durch den Bezugssystemwechsel des reisenden Zwillings, der nicht in seinem Inertialsystem bleibt.

Betrachtung im Raum-Zeit-Diagramm:



Nicht die Beschleunigung ist für das unterschiedliche Altern verantwortlich, sondern die verschiedenen Bezugssysteme bei Hin- und Rückreise, in denen nicht die selben Ereignisse jeweils gleichzeitig stattfinden.

Rollenwechsel der Zwillinge:



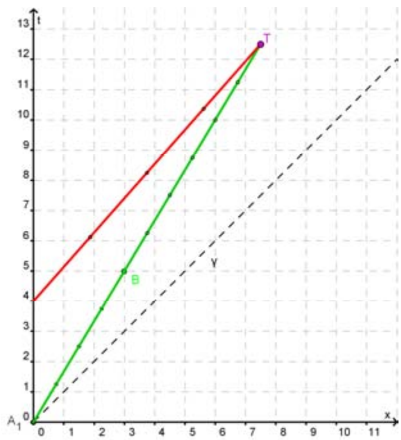
Die Zwillinge sollten die Rollen tauschen, wenn der zunächst auf der Erde gebliebene Zwilling das Bezugssystem wechselt, z. B.:

- *B* kehrt beim Planeten nicht um, da der Antrieb versagt.
- *A* bemerkt Konstruktionsfehler, fliegt nach 4 a Erdzeit mit

$$v = \frac{0{,}6 + 0{,}6}{1 + 0{,}6^2} \cdot c \approx 0{,}8823 \cdot c$$

relativ zur Erde hinterher.

Rollenwechsel der Zwillinge:



Treffpunkt aus Erdsicht

nach $\Delta t = 12{,}5$ a, bei $s = 7{,}5$ LJ

Raumschiff:

$s = 12{,}5 \text{ a} \cdot 0{,}6c = 7{,}5$ LJ

$\Delta t' = \Delta t / \gamma_1 = 10$ a

($s' = 10\text{a} \cdot 0{,}6c = s / \gamma_1 = 6$ LJ)

Rettungssschiff:

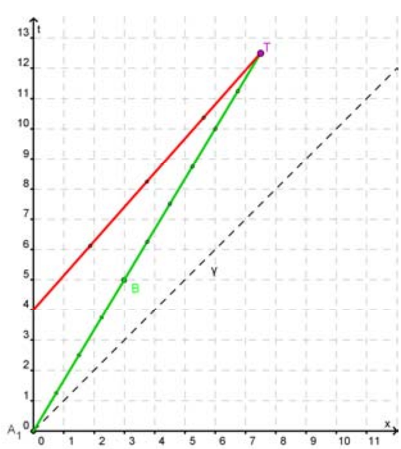
$\text{s} = 8{,}5 \text{ a} \cdot 0{,}8823c = 7{,}5$ LJ

$\Delta t'' = 4\text{a} + 8{,}5\text{a} / \gamma_2 = 8$ a

($s'' = 4\text{a} \cdot 0{,}8823c = s / \gamma_2 \approx 3{,}53$ LJ)

$v_1 = 0{,}6 \cdot c \quad \gamma_1 = 1{,}25 \qquad v_2 \approx 0{,}8823 \cdot c \quad \gamma_2 \approx 2{,}1245$

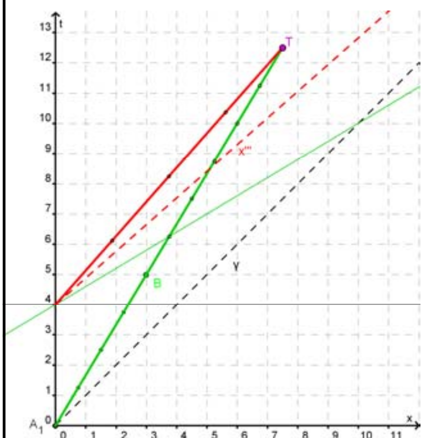
Rollenwechsel der Zwillinge:



Fazit:

Der gewünschte Rollenwechsel fand statt.
Wieder vergehen für den Zwilling, der das Inertialsystem wechselt nur 8 Jahre,
während bei dem Zwilling, der in seinem Inertialsystem verbleibt 10 Jahre vergehen.

Rollenwechsel der Zwillinge:

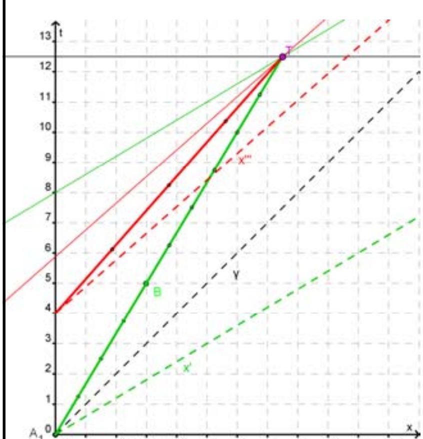


Relativität der Gleichzeitigkeit

Zeit im Raumschiff beim Start des Rettungsschiffes:

- aus Erdsicht: 3,2 a
- aus Rettungsschiffsicht: 6,8 a
- aus Raumschiffsicht: 5 a

Rollenwechsel der Zwillinge:

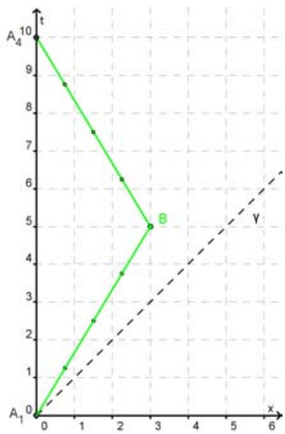


Relativität der Gleichzeitigkeit

Zeit auf der Erde beim Treffpunkt:

- aus Erdsicht: 12,5 a
- aus Raumschiffsicht: 8 a
- aus Rettungsschiffsicht: 5,88 a

Lichtsignale – direkte Beobachtung:



Beide Zwillinge senden jedes Jahr ein Lichtsignal aus.

- Entfernen (Rotverschiebung):

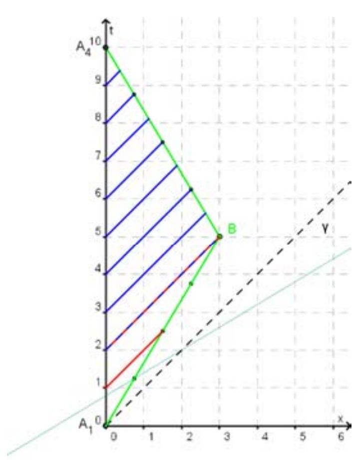
$$f' = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot f$$

- Annähern (Blauverschiebung):

$$f' = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \cdot f = 2 \cdot f$$

- alle Lichtsignale verlaufen in Richtung der Diagonalen

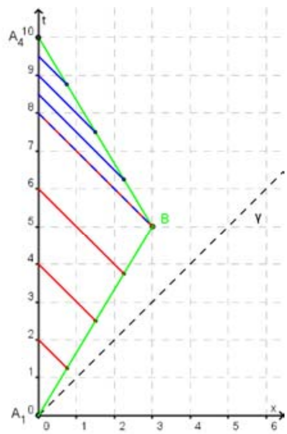
Lichtsignale – direkte Beobachtung:



Beobachtung des reisenden Zwillings:

- 1. Signal nach 2 a
- Insgesamt 10 Signale (mit dem bei Ankunft)
- Sendeintervall 1,25 a

Lichtsignale – direkte Beobachtung:



Beobachtung des reisenden Zwillings:

- 1. Signal nach 2 a
- Insgesamt 10 Signale (mit dem bei Ankunft)
- Sendeintervall 1,25 a

Beobachtung des zurückgebliebenen Zwillings:

- 1. Signal ebenfalls nach 2 a
- Insgesamt 8 Signale

Was bleibt?

Das Zwillingsparadoxon:

- ist auch ohne allgemeine Relativitätstheorie nur mit der speziellen Relativitätstheorie erklärbar
- tritt beim Wechsel des Inertialsystems auf
- beruht auf der Relativität der Gleichzeitigkeit in verschiedenen Inertialsystemen (in verschiedenen Inertialsystemen werden unterschiedliche Ereignisse als gleichzeitig wahrgenommen)
- ist kompliziert und deshalb für die Schule nur sehr bedingt geeignet

Empfehlung: Das unterschiedliche Altern nur aus Erdsicht erklären, das scheinbare Paradoxon nicht thematisieren (?????)