

Die einfachsten Lösungen sind auch die wichtigsten

F. Herrmann und M. Pohlig



www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de

1. Was versteht man unter einer Lösung der Einstein-Gleichung?
2. Die Schwarzschild-Lösung
3. Die Robertson-Walker-Metrik
4. Die Fridmann-Gleichungen

1. Was versteht man unter einer Lösung der Einstein-Gleichung?

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Gegeben: $T_{\mu\nu}$

Gesucht: $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix}$$

In den wichtigsten Fällen sind mehrere der $g_{\mu\nu}$ gleich null.

Daher gibt man die Lösung an in der Form $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

1. Was versteht man unter einer Lösung der Einstein-Gleichung?
2. Die Schwarzschild-Lösung
3. Die Robertson-Walker-Metrik
4. Die Fridmann-Gleichungen

In der Umgebung einer kugelsymmetrischen
Massenverteilung

Im Innern einer kugelsymmetrischen homogenen
Massenverteilung

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2$$

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2}$$

$$\Rightarrow ds^2 > dr^2$$

Das Volumen einer Kugel ist größer,
als man es auf Grund der
Kugeloberfläche erwarten würde.

1. Was versteht man unter einer Lösung der Einstein-Gleichung?
2. Die Schwarzschild-Lösung
3. Die Robertson-Walker-Metrik
4. Die Fridmann-Gleichungen

$$ds^2 = a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

a = Skalenfaktor, dimensionslos, mit $a(\text{jetzt}) = 1$

r = Umfang/ 2π (Kreis um Ursprung)

k = Gaußsche Krümmung bei $a = 1$ (Maßeinheit m^{-2}) = $\frac{1}{R_0^2}$

R_0 = Krümmungsradius bei $a = 1$

$$ds^2 = a^2(t) \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R_0^2}} \quad \Rightarrow \quad ds^2 > dr^2$$

a = Skalenfaktor, dimensionslos, mit $a(\text{jetzt}) = 1$

r = Umfang/ 2π (Kreis um Ursprung)

k = Gaußsche Krümmung bei $a = 1$ (Maßeinheit m^{-2}) = $\frac{1}{R_0^2}$

R_0 = Krümmungsradius bei $a = 1$

$$ds^2 = a^2(t) \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R_0^2}} \Rightarrow ds^2 > dr^2$$

Gaußsche Krümmung negativ: $\frac{1}{R_0^2} < 0$ R_0 imaginär

Gaußsche Krümmung null: $\frac{1}{R_0^2} = 0$ R_0 unendlich

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

Es ist noch zu bestimmen:

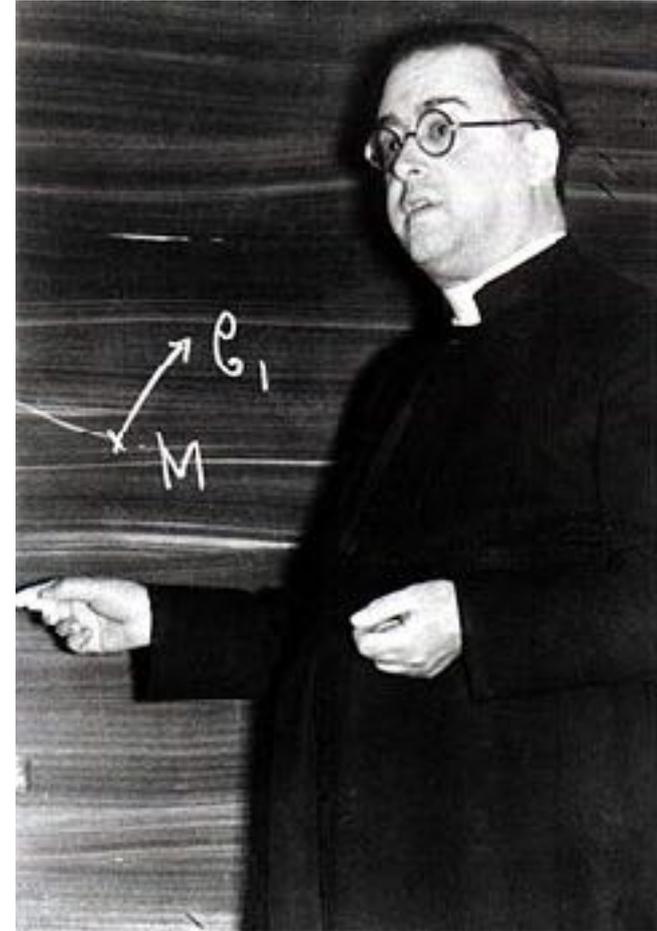
die Krümmung heute

die Zeitfunktion $a(t)$

Dazu Lösung der Einstein-Gleichung

1. Was versteht man unter einer Lösung der Einstein-Gleichung?
2. Die Schwarzschild-Lösung
3. Die Robertson-Walker-Metrik
4. Die Fridmann-Gleichungen

von Fridman und Lemaître unabhängig gefunden 1927



aus Isotropie und Homogenität folgt E - p -Tensor
sehr einfach: $(-\rho c^2, p, p, p)$

ρ und p zeitabhängig

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \pm \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = H = \text{Expansionsrate (Hubblezahl)}$$

kritische Energiedichte $\rho_{\text{kr}} = \frac{3(\dot{a}/a)^2}{8\pi G}$

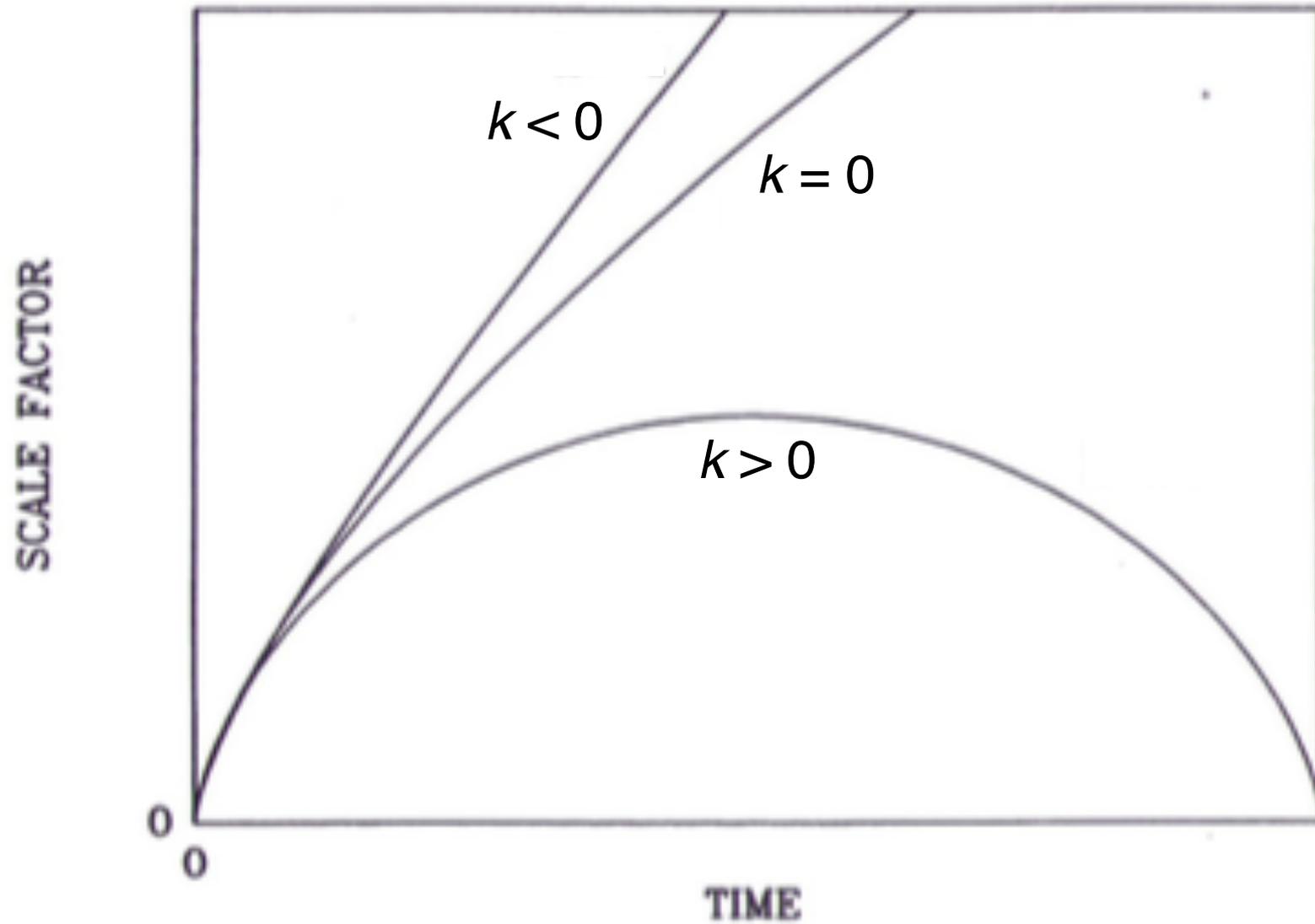
Je nach Energiedichte: drei Möglichkeiten

1. Energiedichte $>$ kritische Energiedichte, Krümmung positiv, geschlossenes Universum
2. Energiedichte = kritische Energiedichte, flaches Universum
3. Energiedichte $<$ kritische Energiedichte, Krümmung negativ

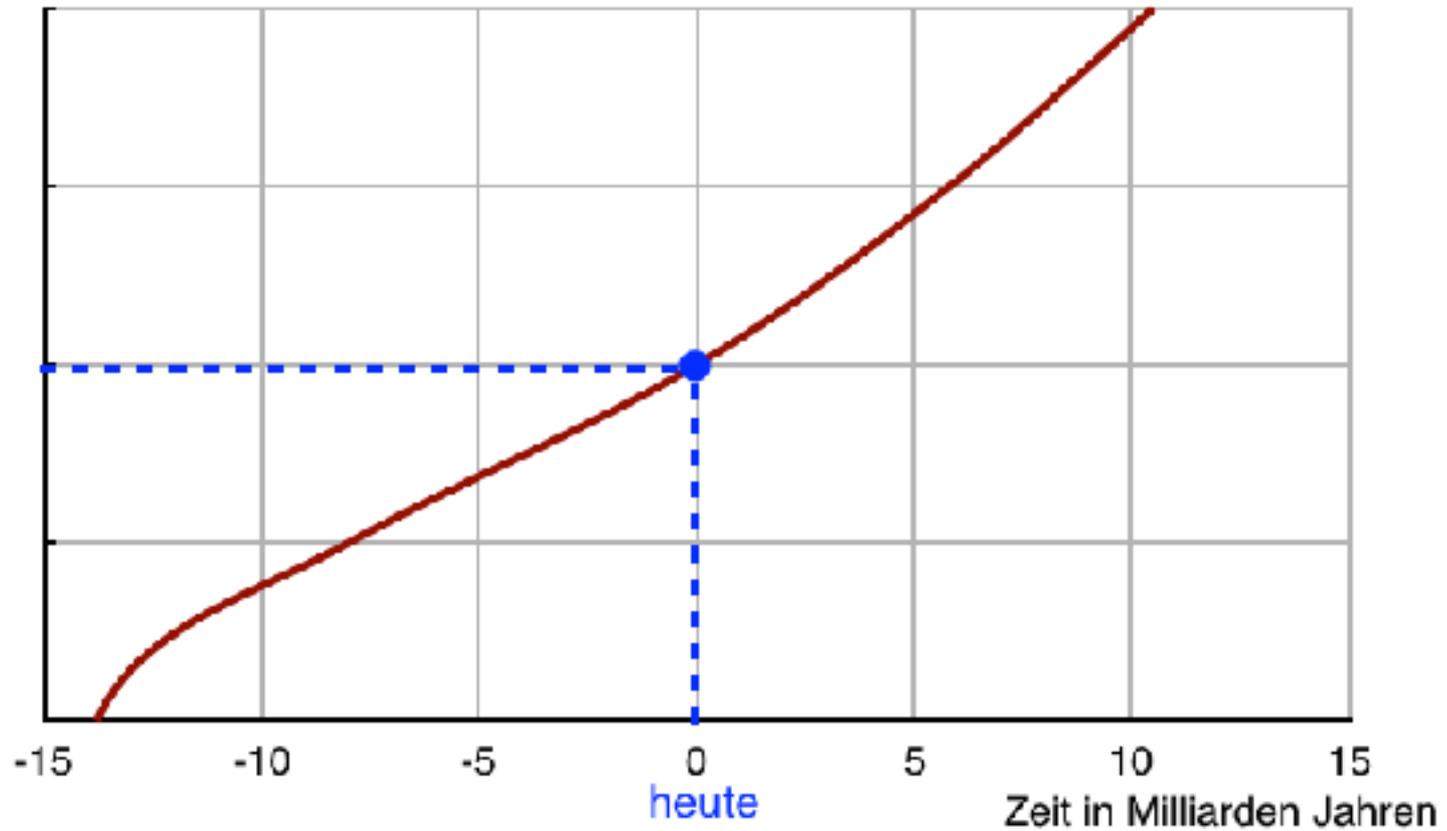
Je nach Zustandsgleichung: drei Möglichkeiten

1. Beschleunigung negativ, Expansion kehrt sich um
2. Expansion wird verlangsamt, aber kein Stillstand
3. Expansion beschleunigt sich

Möglichkeiten zunächst unabhängig voneinander.
Annahmen über Materieformen verkoppeln sie.



Skalenfaktor



Aus Messungen folgt:

Daraus Alter des Universums: 13,7 Milliarden Lj

Universum ist flach

Expansion beschleunigt sich

Energiedichte setzt sich so zusammen:

73 % dunkle Energie

23 % dunkle Materie

4 % baryonische Materie

Inflation

Planckzeit: 10^{-43} s

Inflation: Beginn 10^{-35} s

Ende: 10^{-33} s bis 10^{-30} s

Löst die folgenden Probleme:

1. Universum muss im chemischen und thermischen GG gewesen sein. Nach klassischer Urknalltheorie aber entkoppelt. Also vor Inflation kurz im GG.
2. Universum ist sehr exakt flach. Mit Inflation: einfach ein Effekt des riesigen Krümmungsradius
3. Dichtefluktuationen, führen zu Galaxien. Durch Inflation verstärkt.

Kosmische Hintergrundstrahlung

$$T = 2,725 \pm 0,002 \text{ K}$$

400 Photonen/cm³

380 000 Jahre nach dem Urknall

kosmologische Rotverschiebung:

$$z := \frac{\lambda_a - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_a}{\lambda_e} - 1$$

$$z = 1089$$

EN

DE