

Das Wasserstoffatom



www.kpk-akademie.de

www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de

Spezielle Lösungen:

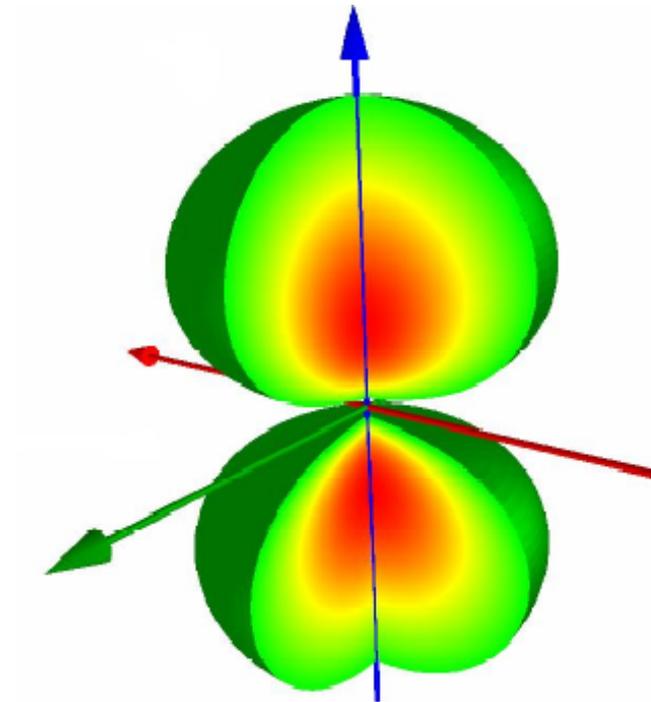
$$\psi(\mathbf{r}, t) = u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}$$

Allgemeine Lösungen:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_k a_k u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}$$

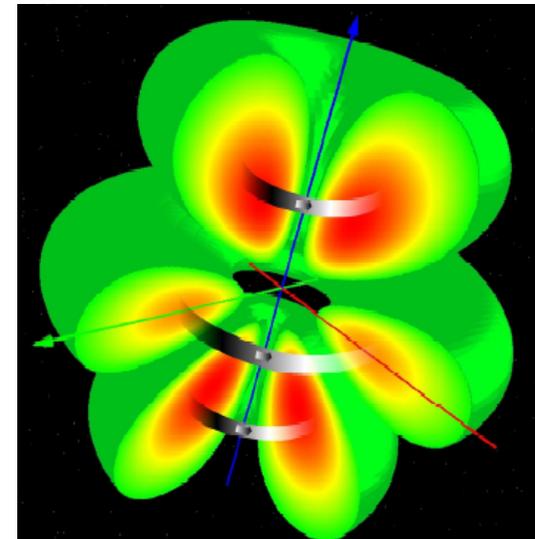
$$\begin{aligned}\rho &= \psi(\mathbf{r}, t)^* \psi(\mathbf{r}, t) \\ &= u_k^*(\mathbf{r}) e^{+\frac{i}{\hbar} E_k t} \cdot u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \\ &= u_k^*(\mathbf{r}) \cdot u_k(\mathbf{r})\end{aligned}$$

- Die Dichte des Elektroniums ist zeitunabhängig.
- Dichte also zeitlich konstant
- Eigenzustand – Eigenwert der Energie



$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} \left(u_k^*(\mathbf{r}) e^{+\frac{i}{\hbar} E_k t} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \nabla u_k(\mathbf{r}) - u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \cdot e^{+\frac{i}{\hbar} E_k t} \nabla u_k^*(\mathbf{r}) \right) \\ &= \frac{\hbar}{2mi} (u_k^*(\mathbf{r}) \nabla u_k(\mathbf{r}) - u_k(\mathbf{r}) \nabla u_k^*(\mathbf{r})) \end{aligned}$$

- Die Strömung des Elektroniums ist zeitunabhängig.
- Strömung ist stationär \rightarrow stationäres Magnetfeld
- Eigenzustand – Neben Eigenwert der Energie auch Eigenwert des Drehimpulses



- Spezielle Lösungen der Schrödinger Gleichung beschreiben:
 - Stationäre Zustände
 - ρ und \mathbf{j} sind zeitunabhängig
- Elektroniummodell:
In stationären Zuständen
 - Die Verteilung des Elektroniums ist zeitunabhängig.
→ statisches elektrisches Feld
 - Wenn in einem stationären Zustand Stromdichte nicht verschwindet:
→ stationäres magnetisches Feld
 - Elektrodynamik sagt: Die Hülle strahlt in stationären Zuständen nicht!

Spezielle Lösungen:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}$$

Allgemeine Lösungen:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_k a_k u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}$$

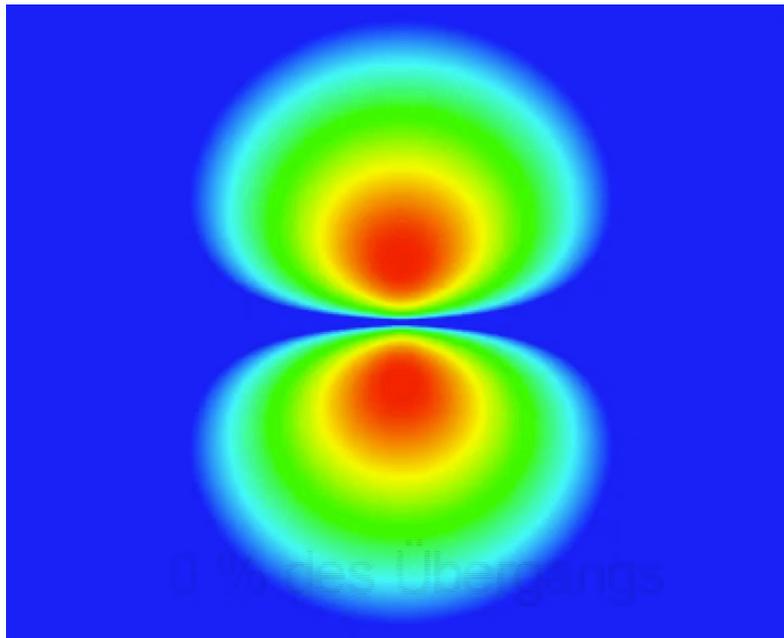
Allgemeine Lösungen:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= c_A \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B \psi_B(\mathbf{r}, t) \\ &= c_A u_A(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} + c_B u_B(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_B t}\end{aligned}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + C_2(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

- Dichte ist zeitabhängig
- Ortsabhängig, zeitunabhängiger Term
- Rest schwingt harmonisch

$$\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$



A: 100%
B: 0%

Allgemeine Lösungen:

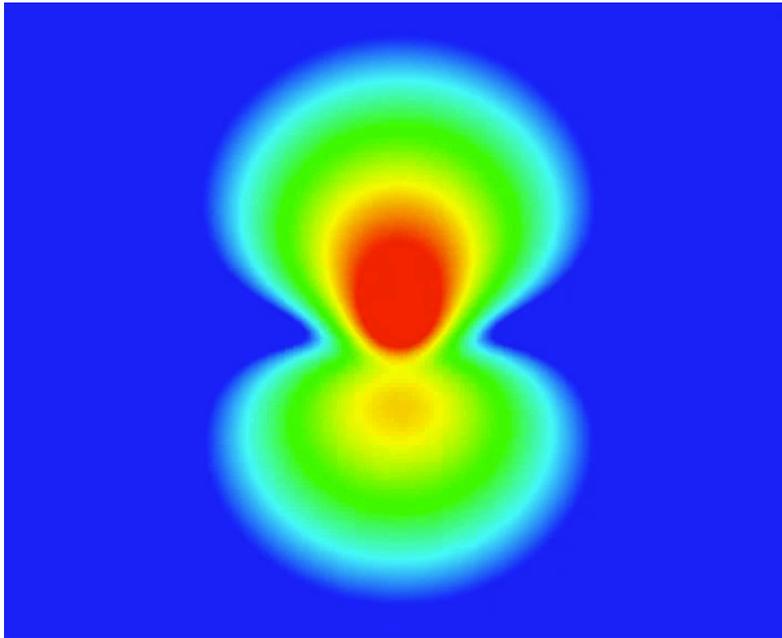
$$\psi(\mathbf{r}, t) = c_A \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B \psi_B(\mathbf{r}, t)$$

$$= c_A u_A(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} + c_B u_B(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_B t}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + C_2(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

- Dichte ist zeitabhängig
- Ortsabhängig, zeitunabhängiger Term
- Rest schwingt harmonisch

$$\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$

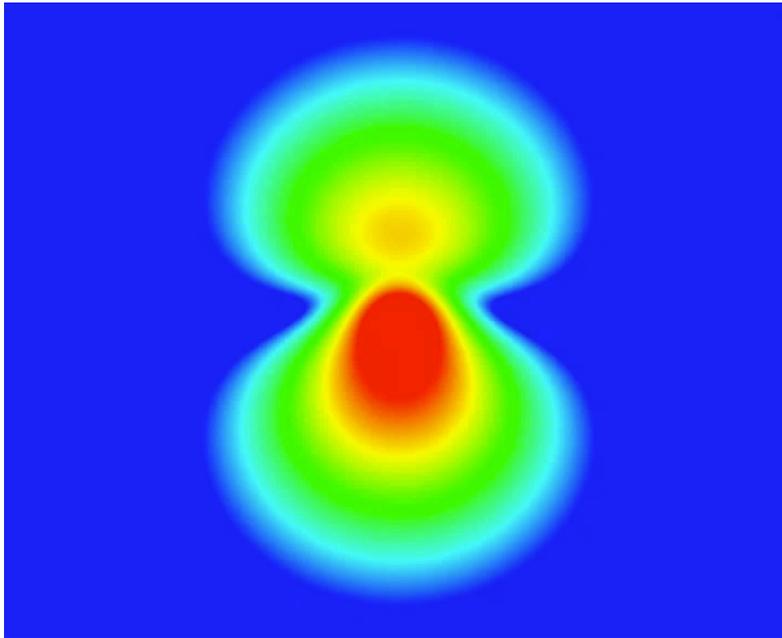


A: 80%
B: 20%

Allgemeine Lösungen:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= c_A \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B \psi_B(\mathbf{r}, t) \\ &= c_A u_A(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} + c_B u_B(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_B t}\end{aligned}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + C_2(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$



- Dichte ist zeitabhängig
- Ortsabhängig, zeitunabhängiger Term
- Rest schwingt harmonisch

$$\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$

A: 60%
B: 40%

Allgemeine Lösungen:

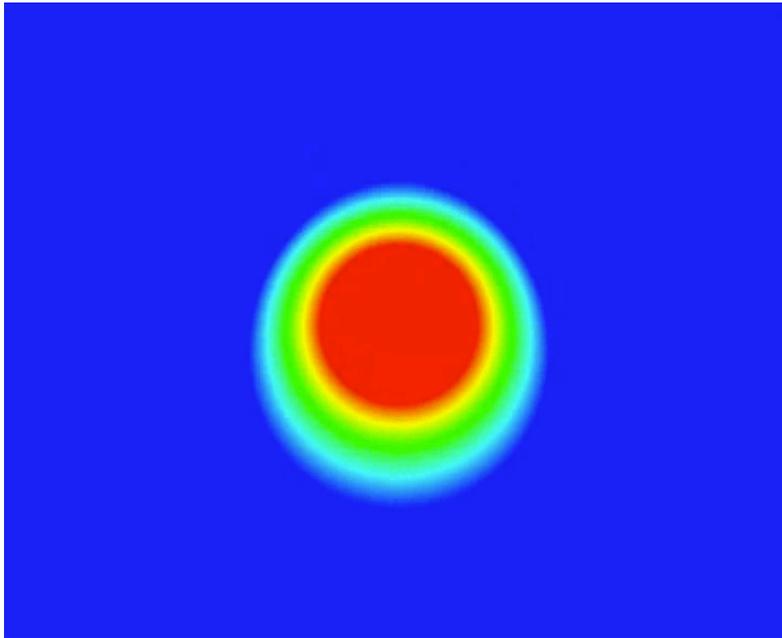
$$\psi(\mathbf{r}, t) = c_A \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B \psi_B(\mathbf{r}, t)$$

$$= c_A u_A(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} + c_B u_B(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_B t}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + C_2(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

- Dichte ist zeitabhängig
- Ortsabhängig, zeitunabhängiger Term
- Rest schwingt harmonisch

$$\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$



A: 20%
B: 80%

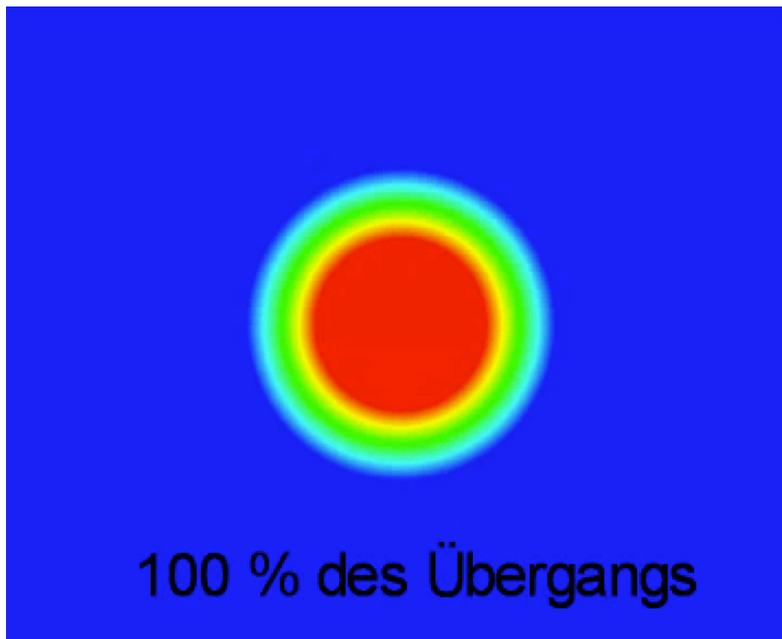
Allgemeine Lösungen:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= c_A \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B \psi_B(\mathbf{r}, t) \\ &= c_A u_A(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} + c_B u_B(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_B t}\end{aligned}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + C_2(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

- Dichte ist zeitabhängig
- Ortsabhängig, zeitunabhängiger Term
- Rest schwingt harmonisch

$$\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$



A: 0%
B: 100%

Allgemeine Lösungen:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= c_A \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B \psi_B(\mathbf{r}, t) \\ &= c_A u_A(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_A t} + c_B u_B(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_B t}\end{aligned}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = C_0(\mathbf{r}) + C_1(\mathbf{r}) \sin(\omega t) + C_2(\mathbf{r}) \cos(\omega t)$$

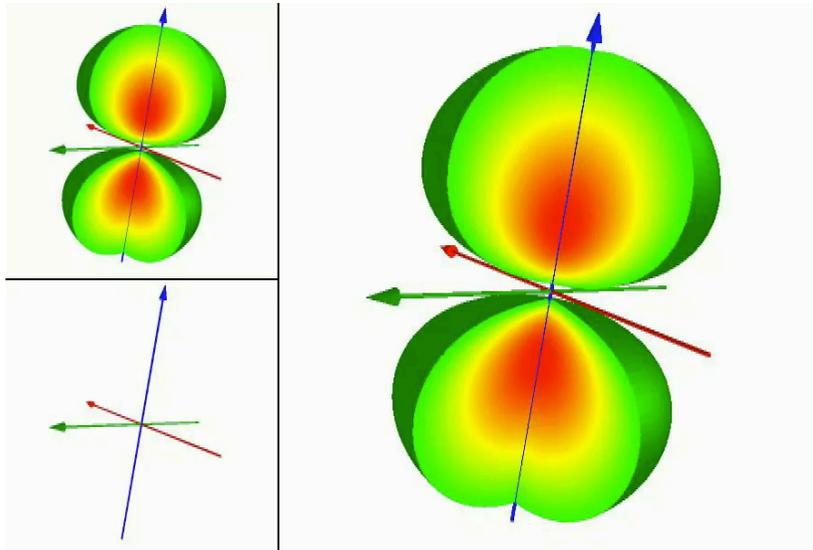
- Dichte ist zeitabhängig
- Ortsabhängig, zeitunabhängiger Term
- Rest schwingt harmonisch

$$\omega = \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = c_A(t) \psi_A(\mathbf{r}, t) + c_B(t) \psi_B(\mathbf{r}, t)$$

Das verlangt die Elektrodynamik

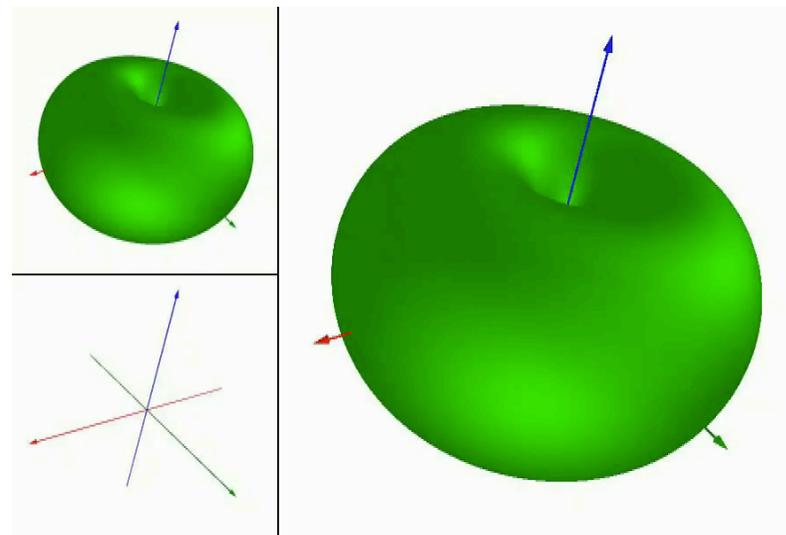
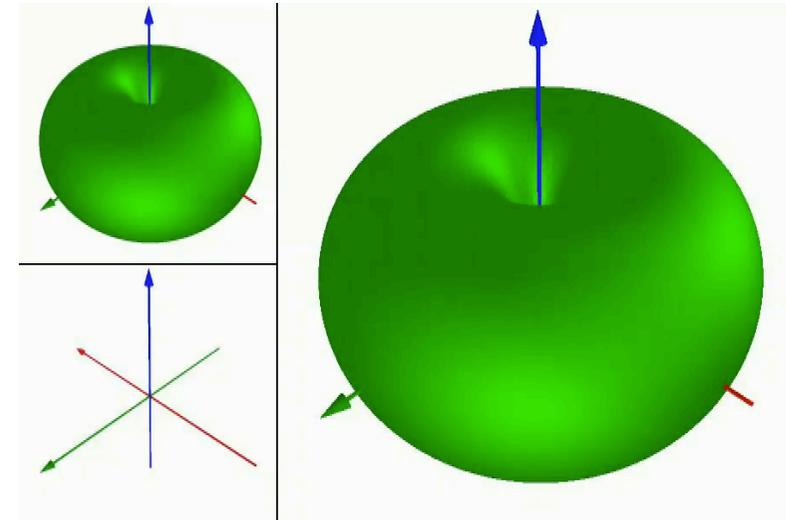
Allgemeine Lösungen:



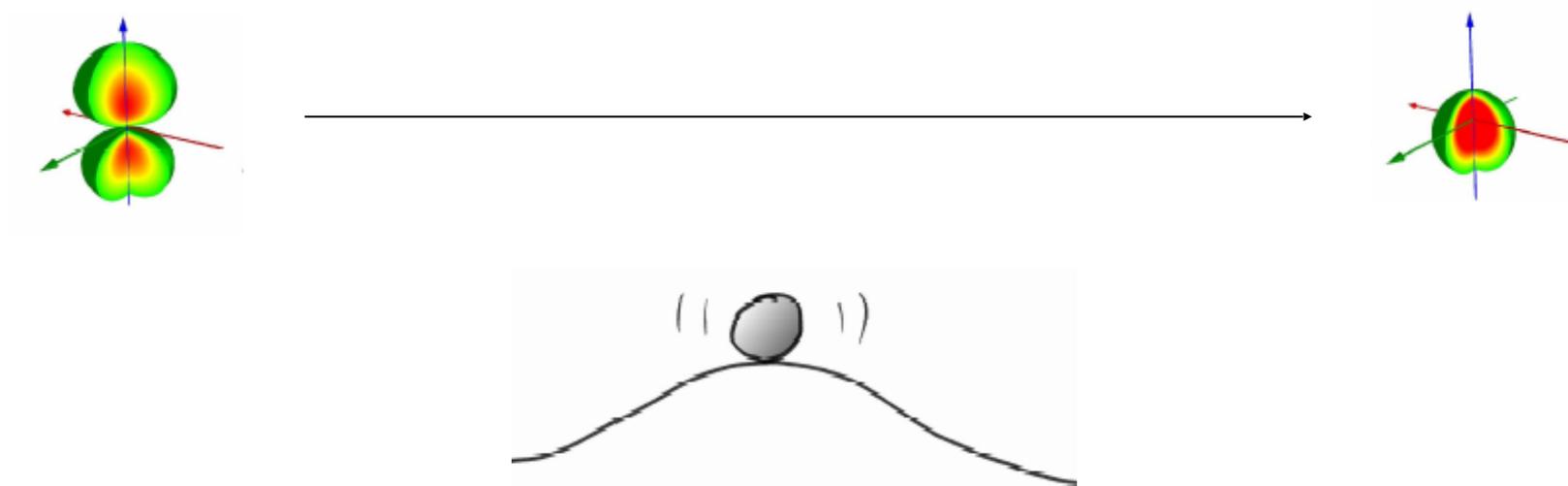
Zerlegung 1: $(2, 1, 0) - (1, 0, 0)$

Zerlegung 1: $(2, 1, 1) - (1, 0, 0)$

Zerlegung 1: $(2, 1, -1) - (1, 0, 0)$



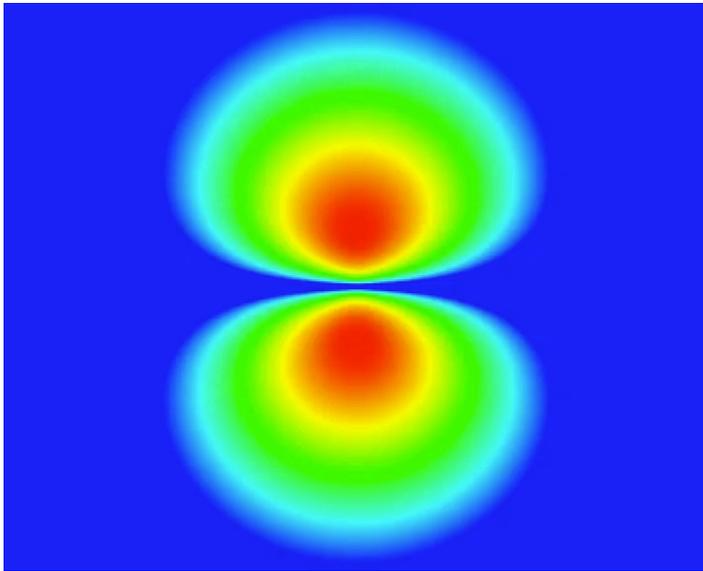
Allgemeine Lösungen:



Wer stört das Gleichgewicht?

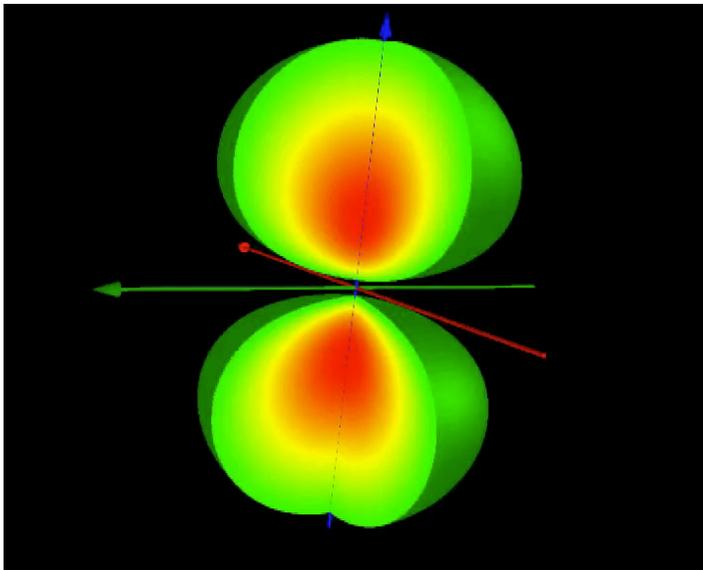
- Stöße mit anderen Atomen
- Fluktuationen des EM-Feldes im Grundzustand.

Allgemeine Lösungen:

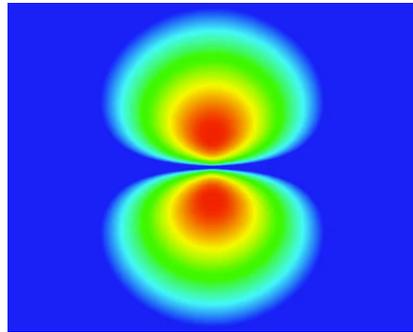


$$(2,1,0) \rightarrow (1,0,0)$$

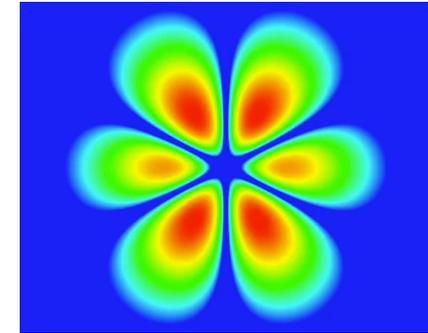
Eine Schwingung: 10^{-15} s
Anzahl der Schwingungen: 10^7
Dauer des Übergangs: 10^{-8} s



Allgemeine Lösungen:



$(2,1,0) - (1,0,0)$

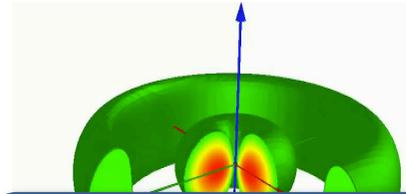


$(4,3,1) - (2,1,0)$



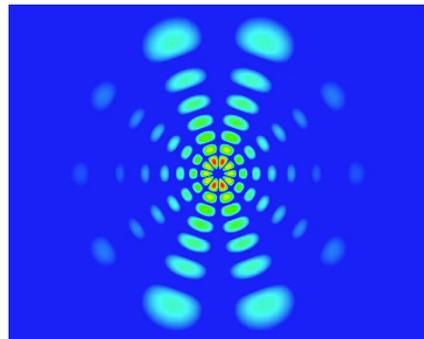
$(6,4)$

$\Delta l = \pm 1$: Dipolcharakter



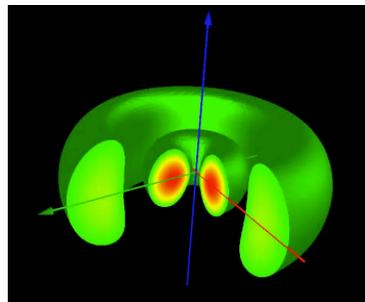
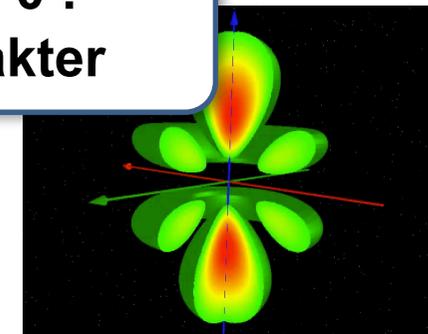
$(4,3,1) - (2,1,0)$

$\Delta l = \pm 2$ oder $\Delta l = 0$:
Quadrupolcharakter



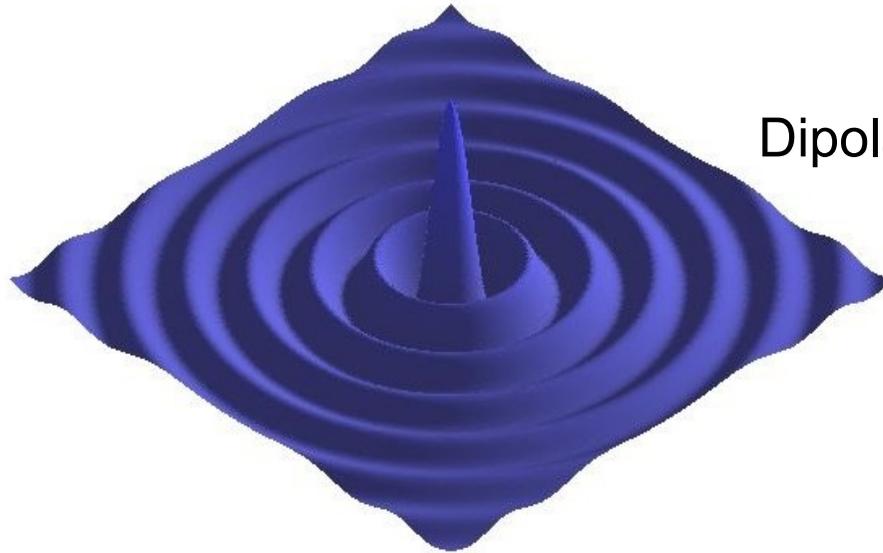
$(12,5,1) - (10,6,1)$

$(4,3,0) - (2,1,0)$



$(4,2,2) - (3,2,0)$

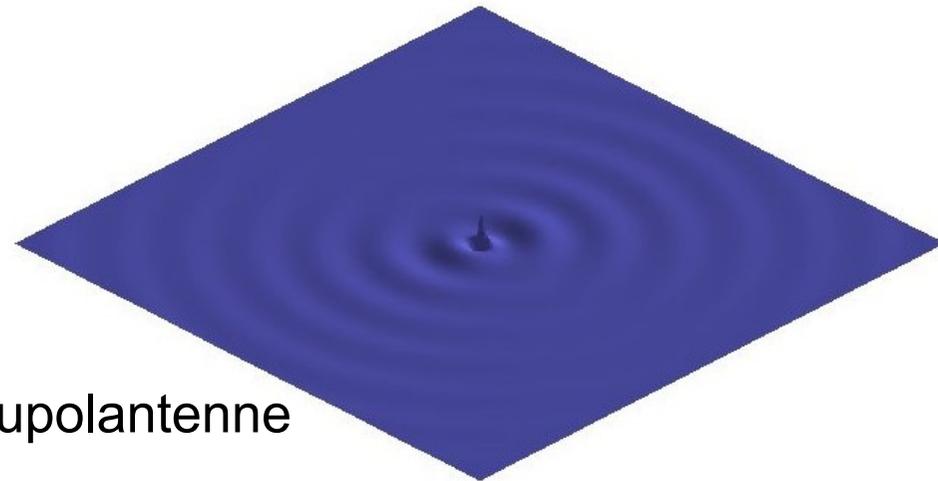
Allgemeine Lösungen:



Dipolantenne

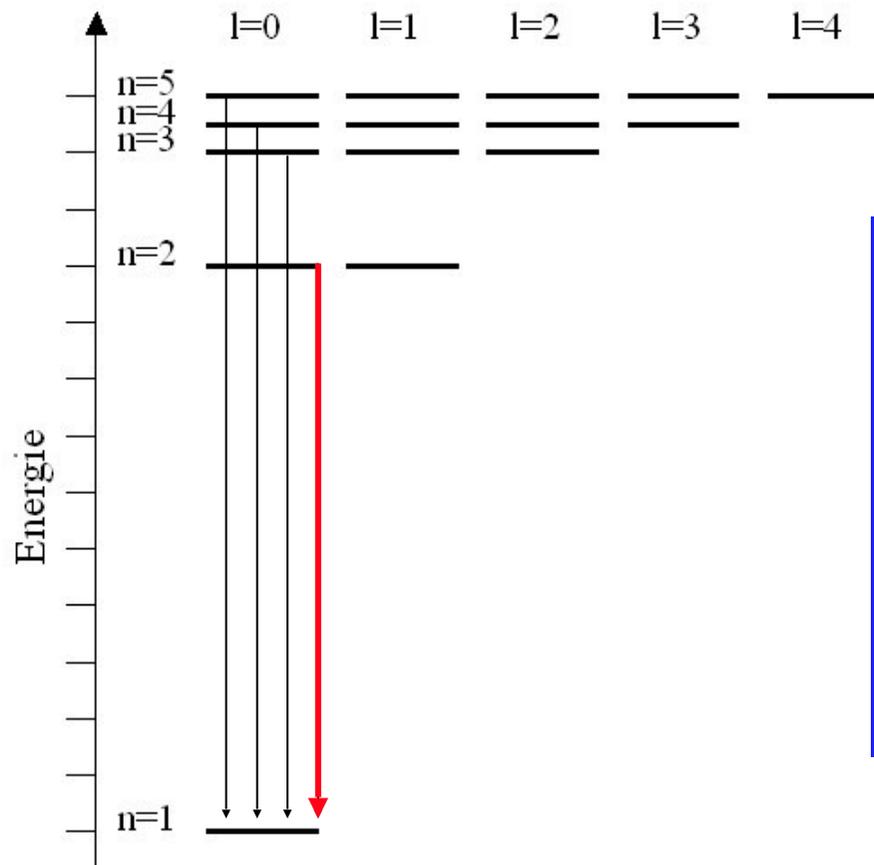
Hat die Strahlung Dipolcharakter, dann ist der Übergang „erlaubt“ ($\Delta l = \pm 1$).

Hätte die Strahlung Quadrupolcharakter, dann ist der Übergang „nicht erlaubt“ ($\Delta l = 0$ oder $\Delta l = \pm 2$).

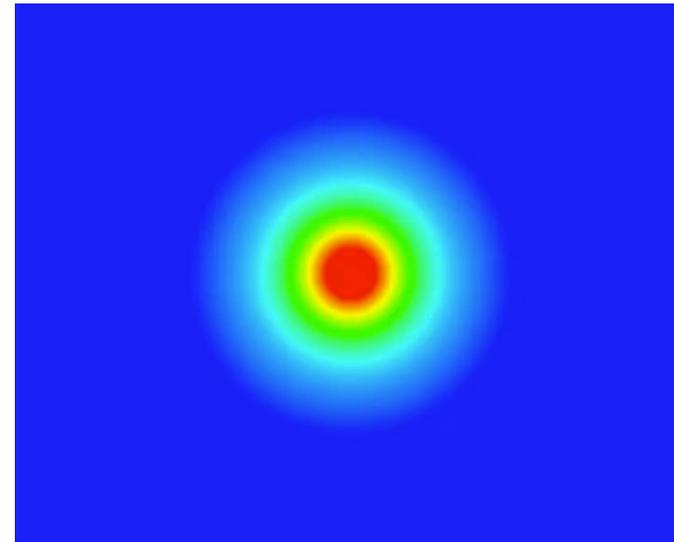


Quadrupolantenne

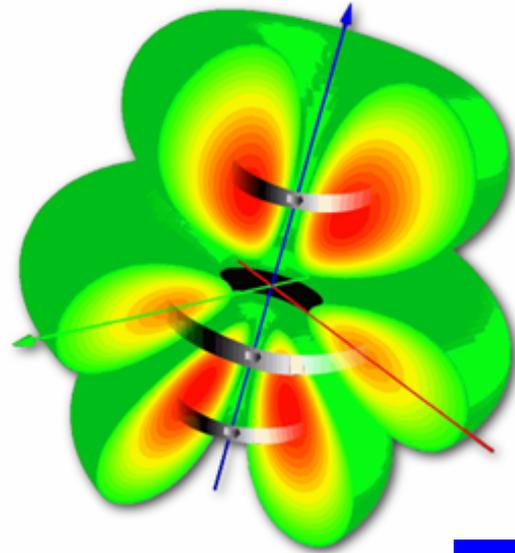
Allgemeine Lösungen:



$(2,0,0) \rightarrow (1,0,0)$

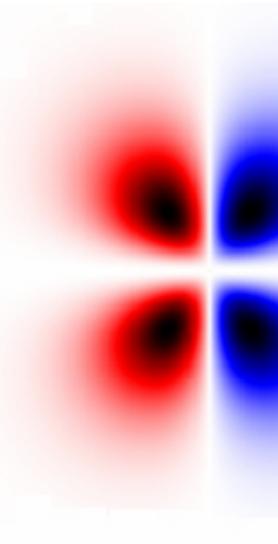
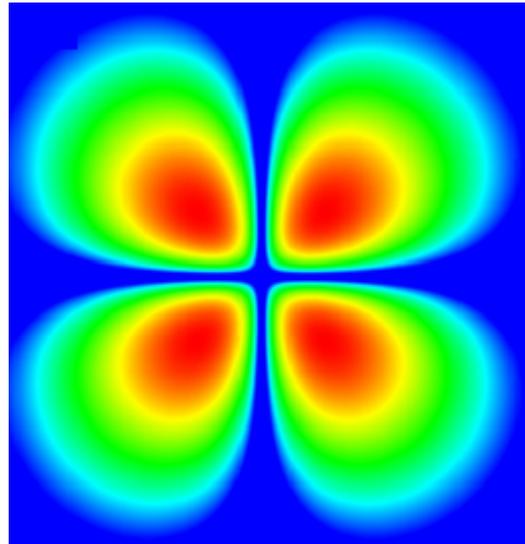


Allgemeine Lösungen:

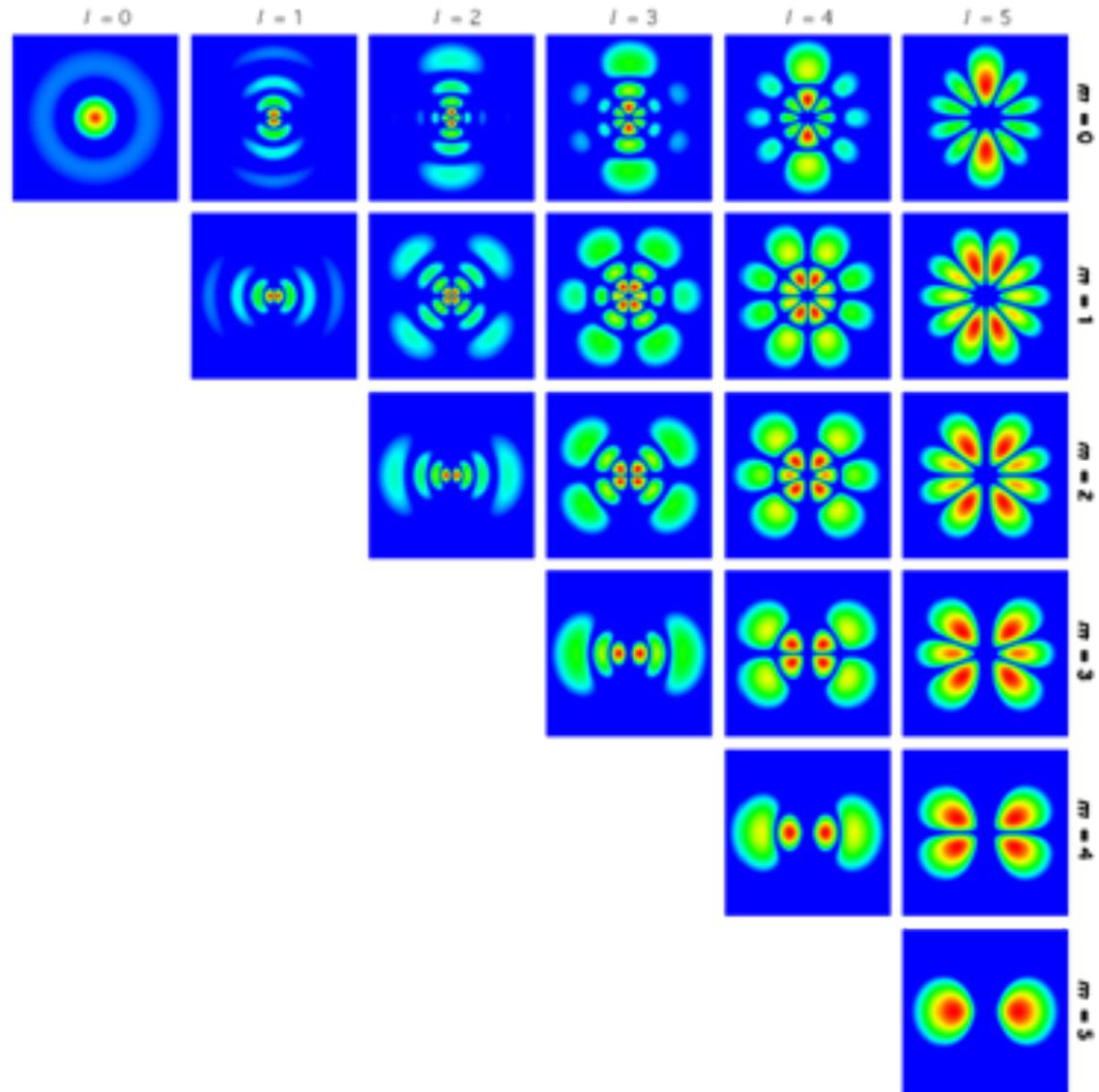


Elektroniumdichte im Schnitt
und Strömung des
Elektroniums durch Pfeile
angedeutet

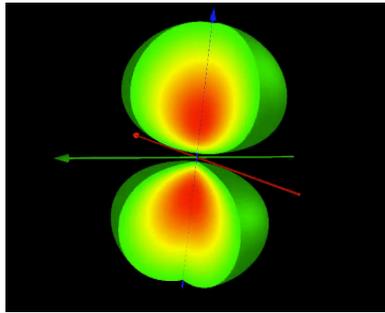
Elektroniumdichte in
2D Darstellung und
Stromdichte: rot aus
der Bildebene heraus,
blau in die Bildebene
hinein



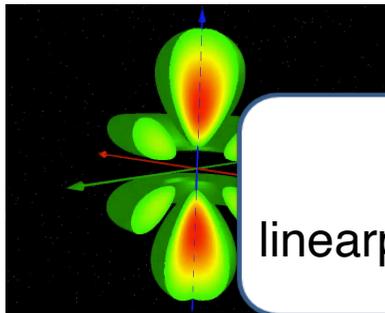
$n = 6$



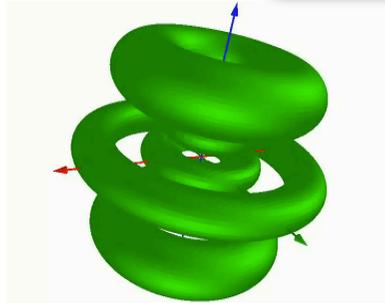
Allgemeine Lösungen:



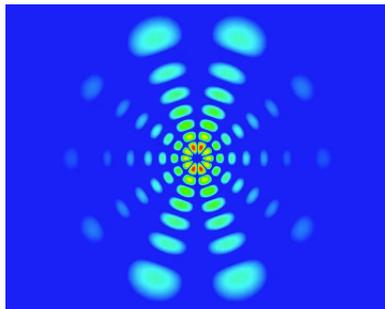
(2,1,0) – (1,0,0)



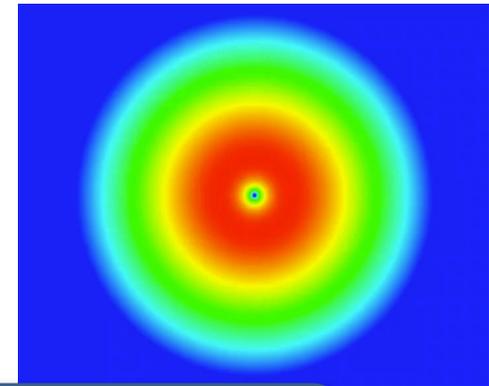
$\Delta m = 0$
linearpolarisiertes Licht



(6,4,2) – (5,3,2)



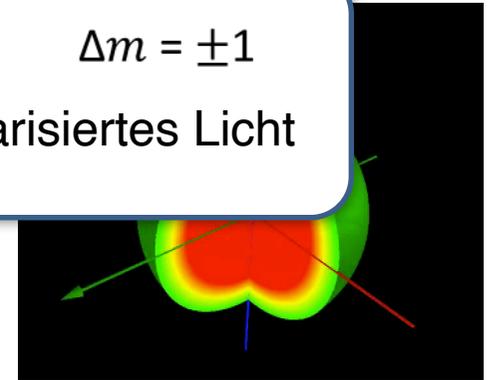
(12,5,1) – (10,6,1)



(2,1,1) – (1,0,0)

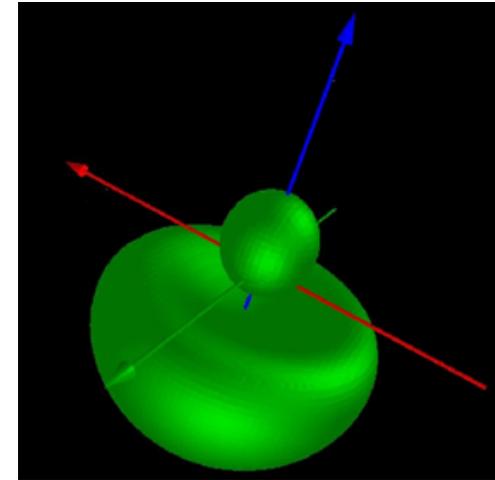
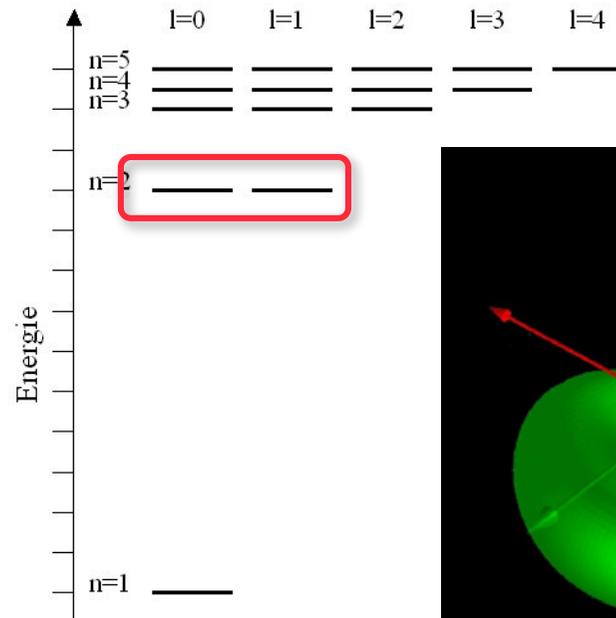
$\Delta m = \pm 1$
zirkularpolarisiertes Licht

(2,1,-1) – (1,0,0)



Allgemeine Lösungen:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \\ &= \sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \cdot \sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k(\mathbf{r}) \end{aligned}$$



$$\varrho = \psi(\mathbf{r}, t)^* \psi(\mathbf{r}, t)$$

$$= \left(e^{+\frac{i}{\hbar} E t} \cdot \sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k^*(\mathbf{r}) \right) \cdot \left(e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \cdot \sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k(\mathbf{r}) \right)$$

$$= \left(\sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k^*(\mathbf{r}) \right) \cdot \left(\sum_{k \text{ mit gl.E}} a_k u_k(\mathbf{r}) \right)$$

Bilder sollen folgende Eigenschaften veranschaulichen:

- ✓ Platzbedarf
- ✓ Drehimpuls
- ✓ Magnetismus

Man soll sehen können,

- ✓ warum ein Atom in bestimmten Zuständen nicht strahlt,
- ✓ warum es in anderen Zuständen strahlt,
- ✓ ob die Strahlung stark oder schwach ist,
- ✓ ob die Strahlung linear oder zirkularpolarisiert ist.

1. Erläuterungen und Animationen
http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/software/hydrogenlab/elektronium/HTML/einleitung_hauptseite_de.html
2. Das Wasserstoffatom (CD, Aulis Verlag Deubner)
3. P. Bronner, H. Hauptmann, F. Herrmann: Wie sieht ein Atom aus?
Praxis der Naturwissenschaft – Physik in der Schule: Heft 2/55 1. März 2006;
55. Jahrgang: physics meets chemistry;
4. M. Pohlig: Ströme in der Atomhülle.
Praxis der Naturwissenschaft – Physik in der Schule: Heft 1/61 2012;
„Alles fließt“