Die Einsteinschen Feldgleichungen – nicht so schlimm wie sie aussehen

F. Herrmann und M. Pohlig, Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie

www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de

Einsteingleichungen kompliziert:

tensoriell

nichtlinear

Ihr Wirkungsprinzip ist aber leicht zu verstehen.

Man ist besonders interessiert an einigen wenigen Lösungen:

mit hochsymmetrischen Randbedingungen

Diese sind auch mathematisch leicht zu durchschauen.

Schwarzschild 1916

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 1920-1930

Einsteinsche Feldgleichungen

Wirkung: Krümmung der Raumzeit

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Ursache: Materie

Raumzeit   Materie

$g_{\mu\nu}$ = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$ = Energie-Impuls-Tensor

Energiedichte   Energiestromdichte

$$\begin{pmatrix} \rho_E & \frac{j_{Ex}}{c} & \frac{j_{Ey}}{c} & \frac{j_{Ez}}{c} \\ c\rho_{px} & j_{pxx} & j_{pxy} & j_{pxz} \\ c\rho_{py} & j_{pyx} & j_{pyy} & j_{pyz} \\ c\rho_{pz} & j_{pzx} & j_{pzy} & j_{pzz} \end{pmatrix}$$

Impulsdichte   Impulsstromdichte

Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit Materie

$g_{\mu\nu}$ = metrischer Tensor $T_{\mu\nu}$ = Energie-Impuls-Tensor

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

$R_{\mu\nu}$ = Ricci-Krümmungstensor
R = Ricci-Krümmungsskalar
} werden aus $g_{\mu\nu}$ (und Ableitungen) berechnet

Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit Materie

$g_{\mu\nu}$ = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$ = Energie-Impuls-Tensor

Beispiel: Minkowski-Metrik

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit Materie

$g_{\mu\nu}$ = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$ = Energie-Impuls-Tensor

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix}$$

symmetrisch

10 unabhängige Komponenten

Komponenten je nach Koordinatensystem anders.

Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit   Materie

$g_{\mu\nu}$ = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$ = Energie-Impuls-Tensor

$+\Lambda g_{\mu\nu}$ Λ = kosmologische Konstante

Ende