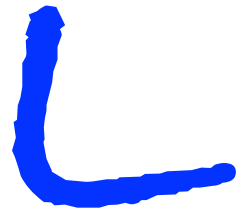


# Die Einsteinschen Feldgleichungen – nicht so schlimm wie sie aussehen

*F. Herrmann und M. Pohlig, Karlsruher Institut für Technologie*



[www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de](http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de)



Einsteingleichungen kompliziert:

tensoriell  
nichtlinear

Ihr Wirkungsprinzip ist aber leicht zu verstehen.

Man ist besonders interessiert an einigen wenigen Lösungen:  
mit hochsymmetrischen Randbedingungen

Diese sind auch mathematisch leicht zu durchschauen.

Schwarzschild 1916

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 1920-1930

# Einsteinsche Feldgleichungen

Wirkung: Krümmung  
der Raumzeit

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit

Materie

Ursache: Materie

$g_{\mu\nu}$  = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$  = Energie-Impuls-Tensor

Energiedichte

Energiestromdichte

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \rho_E & \frac{j_{Ex}}{c} & \frac{j_{Ey}}{c} & \frac{j_{Ez}}{c} \\ \hline c\rho_{px} & j_{pxx} & j_{pxy} & j_{pxz} \\ c\rho_{py} & j_{pyx} & j_{pyy} & j_{pyz} \\ c\rho_{pz} & j_{pzx} & j_{pzy} & j_{pzz} \end{array} \right)$$

Impulsdichte

Impulsstromdichte

# Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit

Materie

$g_{\mu\nu}$  = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$  = Energie-Impuls-Tensor

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$R_{\mu\nu}$  = Ricci-Krümmungstensor }  
 $R$  = Ricci-Krümmungsskalar } werden aus  $g_{\mu\nu}$  (und Ableitungen) berechnet

# Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit

Materie

$g_{\mu\nu}$  = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$  = Energie-Impuls-Tensor

*Beispiel: Minkowski-Metrik*

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit

Materie

$g_{\mu\nu}$  = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$  = Energie-Impuls-Tensor

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix}$$

symmetrisch

10 unabhängige Komponenten

Komponenten je nach Koordinatensystem anders.

# Einsteinsche Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Raumzeit

Materie

$g_{\mu\nu}$  = metrischer Tensor

$T_{\mu\nu}$  = Energie-Impuls-Tensor

$+ \Lambda g_{\mu\nu}$   $\Lambda$  = kosmologische Konstante

# Ende